الدوال العددية الحسابية:

هي كل دالة مجموعة تعريفها الأعداد الصحيحة الموجبة

الدالة الضربية:

نقول عن دالة حسابية أنها ضربية إذا تحققت الشروط الآتية

- f غير صفرية

الدالة الضربية هي دالة غير صفرية

$$\forall a,b \in N \; ; \; d(a,b)=1 \Rightarrow f(a.b) = f(a).f(b)$$

ونقول أنها ضربية تامة إذا تحقق الشرطان السابقان دون أن يكون العددان a,b أوليين.

مثال:

إذا كان α عدد من Z^+ $(\alpha \in Z^+)$ وعرفنا الدالة

$$f: N \longrightarrow R$$
$$n \longrightarrow n^\alpha = f(n)$$

نلاحظ أن هذه الدالة ضربية تامة مهما تكن $n>0$ فإن

$n>0 : f_\alpha(n) = n^\alpha \neq 0$ ①

$n_1, n_2 \in N ; f_\alpha(n_1.n_2)$ ②

$= (n_1.n_2)^\alpha = n_1^\alpha . n_2^\alpha$

يجب أن يكون لدينا علاقات ضربية

$= f_\alpha(n_1).f_\alpha(n_2)$

نتيجة: إذا كانت f دالة ضربية فإن $\Leftarrow$ $f(1)=1$

دالة ضربية ⇏ ضربية تامة

ضربية تامة بالضرورة تكون ضربية

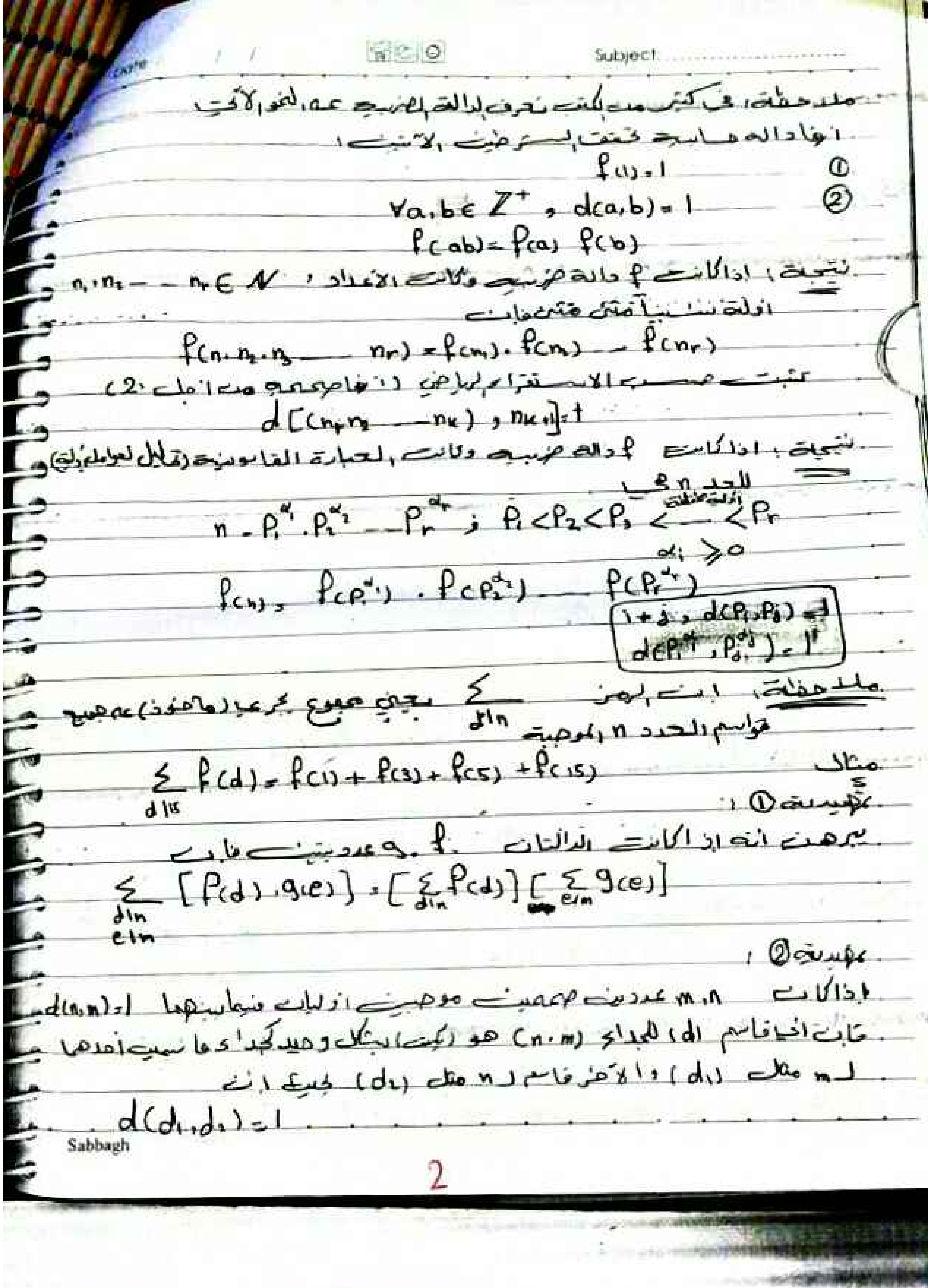
الحل:

بما أن f دالة ضربية فهي غير صفرية حسب التعريف لذلك يوجد عدد طبيعي مثل n بحيث $\exists n \in N ; f(n) \neq 0$

ولذلك:

$$f(n).1 = f(n) = f(n.1)$$
$$= f(n).f(1)$$

بالاختصار على $f(n)$ للطرفين للمساواة نحصل على $f(1)=1$.



ملاحظة: في كثير من الكتب نعرف الدالة الضربية على النحو الآتي

اي دالة حسابية تحقق الشرطين الآتيين:

① $f(1)=1$

② $\forall a,b \in \mathbb{Z}^+ ,\ d(a,b)=1$

$$f(ab)=f(a)\ f(b)$$

نتيجة: اذا كانت f دالة ضربية وكانت الأعداد $n_1, n_2, \ldots, n_r \in N$ اولية نسبياً مثنى مثنى فإن

$$f(n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_r) = f(n_1) . f(n_2) \ldots f(n_r)$$

نثبت حسب الاستقراء الرياضي (1) فإضربها من اجل (2)

$$d[(n_1 n_2 \ldots n_k) , n_{k+1}] = 1$$

نتيجة: اذا كانت f دالة ضربية وكانت العبارة القانونية (تحليل للعوامل الأولية) للعدد n هي

$$n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \ ; \ p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_r$$

(اولية مختلفة)

$$\alpha_i \geq 0$$

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) . f(p_2^{\alpha_2}) \ldots f(p_r^{\alpha_r})$$

لأن $i \neq j ,\ d(p_i , p_j) = 1$

$d(p_i^{\alpha_i} , p_j^{\alpha_j}) = 1$

ملاحظة: ان الرمز $\sum_{d|n}$ يعني مجموع مجاميع (ماخوذة) على جميع قواسم العدد n الموجبة

مثال

$$\sum_{d|15} f(d) = f(1) + f(3) + f(5) + f(15)$$

مبرهنة ①:

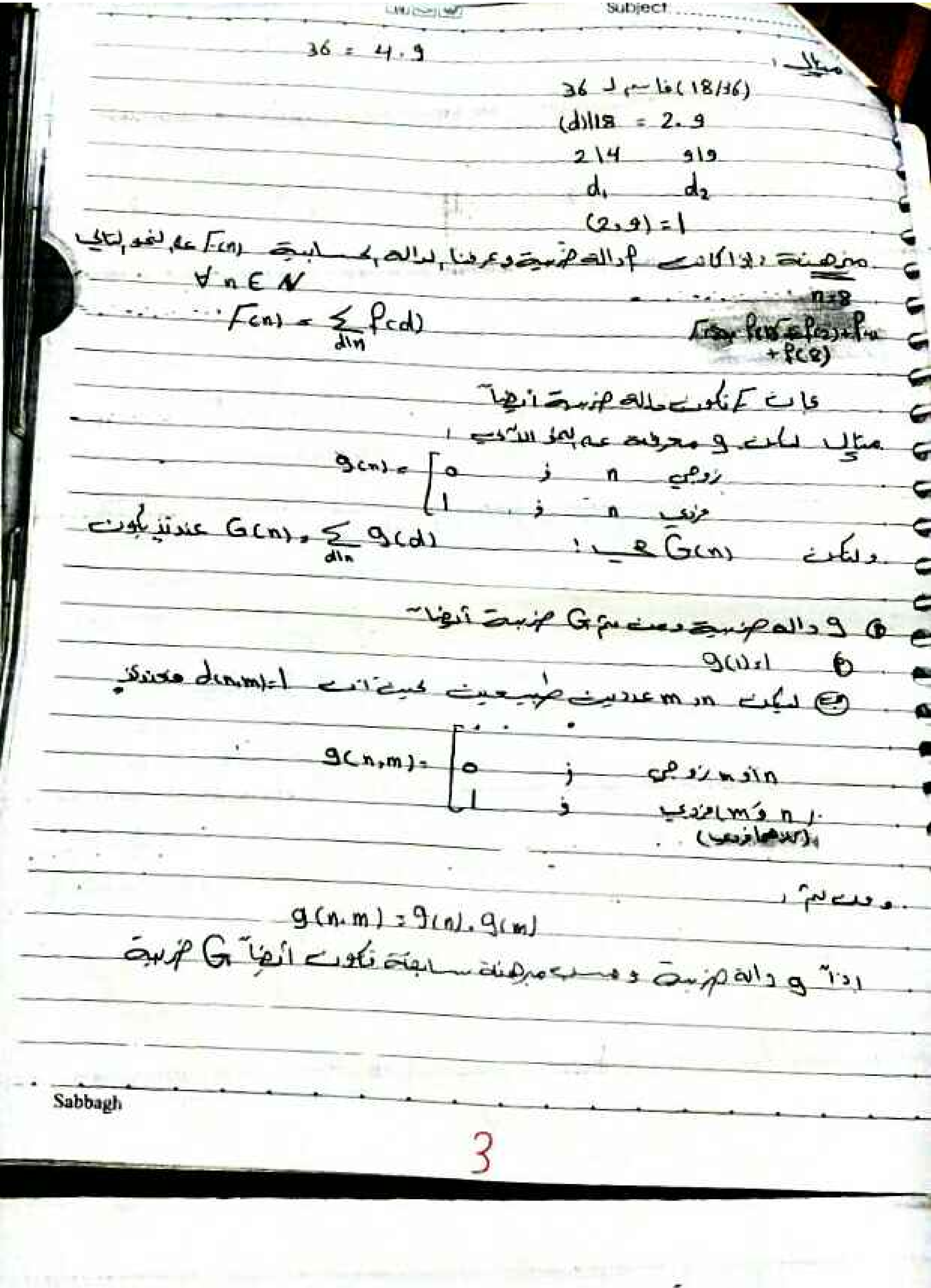
برهن انه اذا كانت الدالتان f , g عدديتين فإن

$$\sum_{\substack{d|n \\ e|m}} [f(d) . g(e)] = \Big[\sum_{d|n} f(d)\Big] \Big[\sum_{e|m} g(e)\Big]$$

مبرهنة ②:

اذا كان m , n عددين صحيحين موجبين اوليين فيما بينهما $d(n,m)=1$ فإن اي قاسم (d) للجداء $(n.m)$ هو (يكتب) بشكل وحيد كجداء لعاملين احدهما لـ n مثل (d_1) والآخر قاسم لـ m مثل (d_2) بحيث ان:

$$d(d_1 , d_2) = 1$$



مثال :

$36 = 4 \cdot 9$

$(18/36)$ قاسم لـ 36

$(d)|18 = 2 \cdot 9$

$2|4 \quad 9|9$

$d_1 \quad d_2$

$(2,9)=1$

مبرهنة : إذا كانت f دالة ضربية وعرفنا الدالة بالصيغة $F(n)$ على النحو التالي

$\forall n \in N$

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

$n=8$

$F(8) = f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$

فإن F تكون دالة ضربية أيضاً

مثال ثالث : g معرفة على النحو الآتي :

$$g(n) = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ زوجي} \\ 1 & ; \ n \text{ فردي} \end{cases}$$

ولتكن $G(n)$ حيث : $G(n) = \sum_{d|n} g(d)$ عندئذٍ يكون

① g دالة ضربية وبالتالي G ضربية أيضاً

② $g(1)=1$

③ ليكن n, m عددين طبيعيين بحيث أن $(n,m)=1$ عندئذٍ

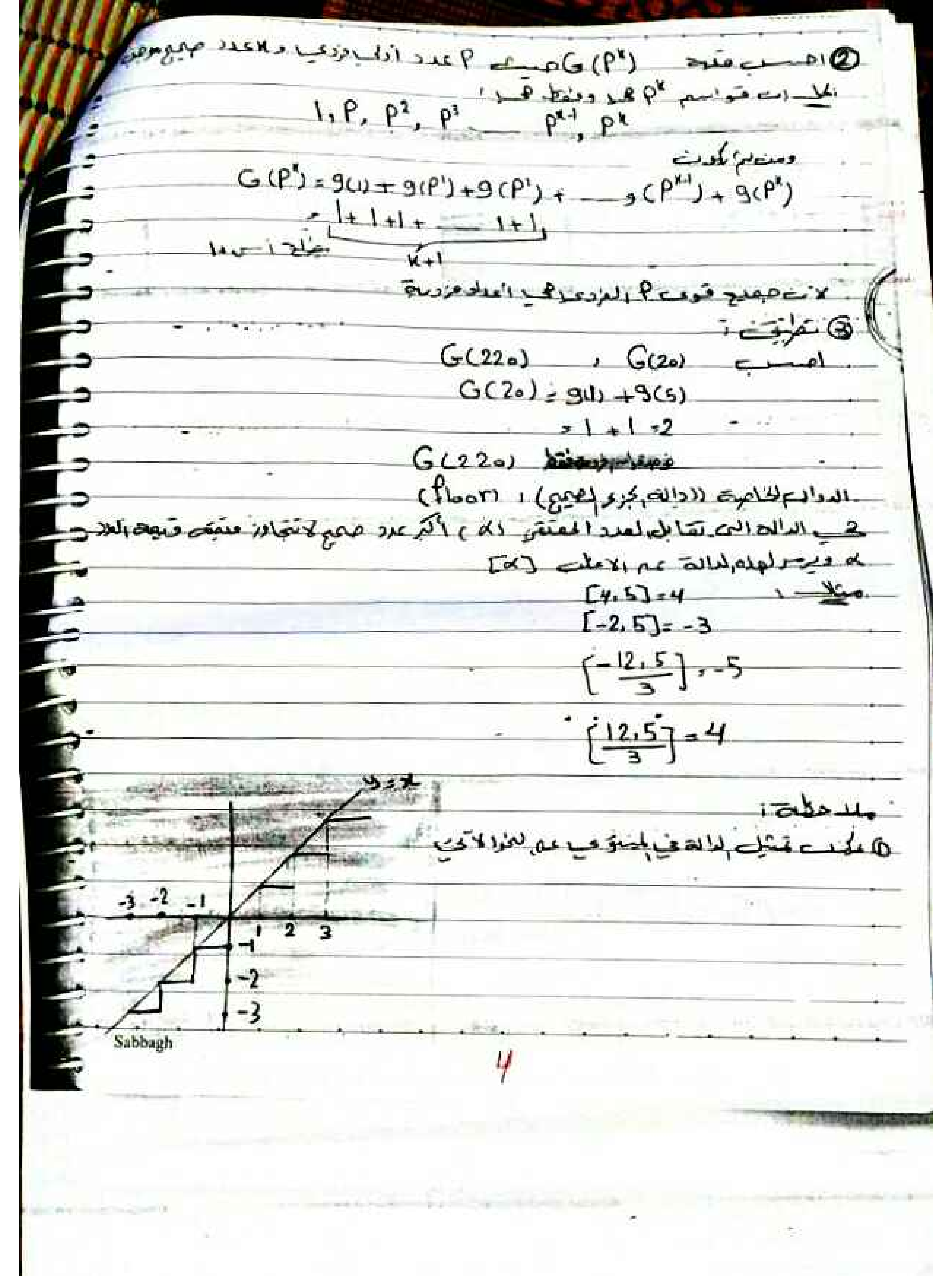
$$g(n \cdot m) = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ أو } m \text{ زوجي} \\ 1 & ; \ n \text{ و } m \text{ فردي (كلاهما فردي)} \end{cases}$$

وبالتالي :

$$g(n \cdot m) = g(n) \cdot g(m)$$

إذاً g دالة ضربية ومن مبرهنة سابقة تكون أيضاً G ضربية

Sabbagh



② احسب قيمة $G(P^k)$ حيث P عدد أولي فردي و k عدد صحيح موجب

الحل: إن قواسم P^k هي فقط هي:

$$1, P, P^2, P^3, \dots, P^{k-1}, P^k$$

ومن ثم يكون

$$G(P^k) = g(1) + g(P^1) + g(P^2) + \dots + g(P^{k-1}) + g(P^k)$$

$$= \underbrace{1+1+1+\dots+1+1}_{k+1}$$

[illegible]

لأن جميع قوى P الفردي هي أعداد فردية

③ تمرين:

احسب $G(20)$, $G(220)$

$G(20) = g(1) + g(5)$

$= 1 + 1 = 2$

$G(220)$ [crossed out]

الدوال الخاصة: (دالة الجزء الصحيح) (floor)

هي الدالة التي تقابل العدد الحقيقي (x) بأكبر عدد صحيح لا يتجاوز قيمة العدد x ويرمز لهذه الدالة عن الأعلى $[x]$

مثال:

$[4.5] = 4$

$[-2.5] = -3$

$\left[-\frac{12.5}{3}\right] = -5$

$\left[\frac{12.5}{3}\right] = 4$

ملاحظة:

① يمكن تمثيل الدالة في المستوي على النحو الآتي

Sabbagh

Date: / / Subject:

ملاحظة (2) من تعريف الدالة نلاحظ أن العدد الحقيقي α يحقق

$$[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$$

أكبر أو يساوي جزئه الصحيح وأصغر تماماً من جزئه الصحيح مضافاً إليه (1) ويمكن التعبير عنه.

$$\alpha = [\alpha]+\theta \quad , \quad 0 \le \theta < 1$$

بعض الخواص الأساسية لدالة جزء الصحيح.

(1) إذا كانت $\alpha \in \mathbb{R}$ و α عدد حقيقي و x عدد صحيحاً $\in \mathbb{Z}$ فإن جزء الصحيح

$$[x+\alpha] = x+[\alpha]$$

مثال:

$x=3$

$\alpha = 1/2$

$[3+1/2] = 3+0$

$x=2 \qquad \alpha=3.2$

(2) إذا كانت $\alpha \in \mathbb{R}$ و n عدد صحيح موجب فإن

$$\left[\frac{[\alpha]}{n}\right] = \left[\frac{\alpha}{n}\right]$$

$$\left[\frac{[12.5]}{3}\right] = 4 \qquad \left[\frac{\alpha}{n}\right] = \left[\frac{12.5}{3}\right] = 4$$

مبرهنة: إذا كانت n عدداً $n \in \mathbb{Z}^+$ صحيحاً موجباً و P عدداً أولياً فإن أسس أكبر قوة لـ P تقسم $(n!)$ ويرمز لها $H_P(n!)$

تحسب بالعلاقة

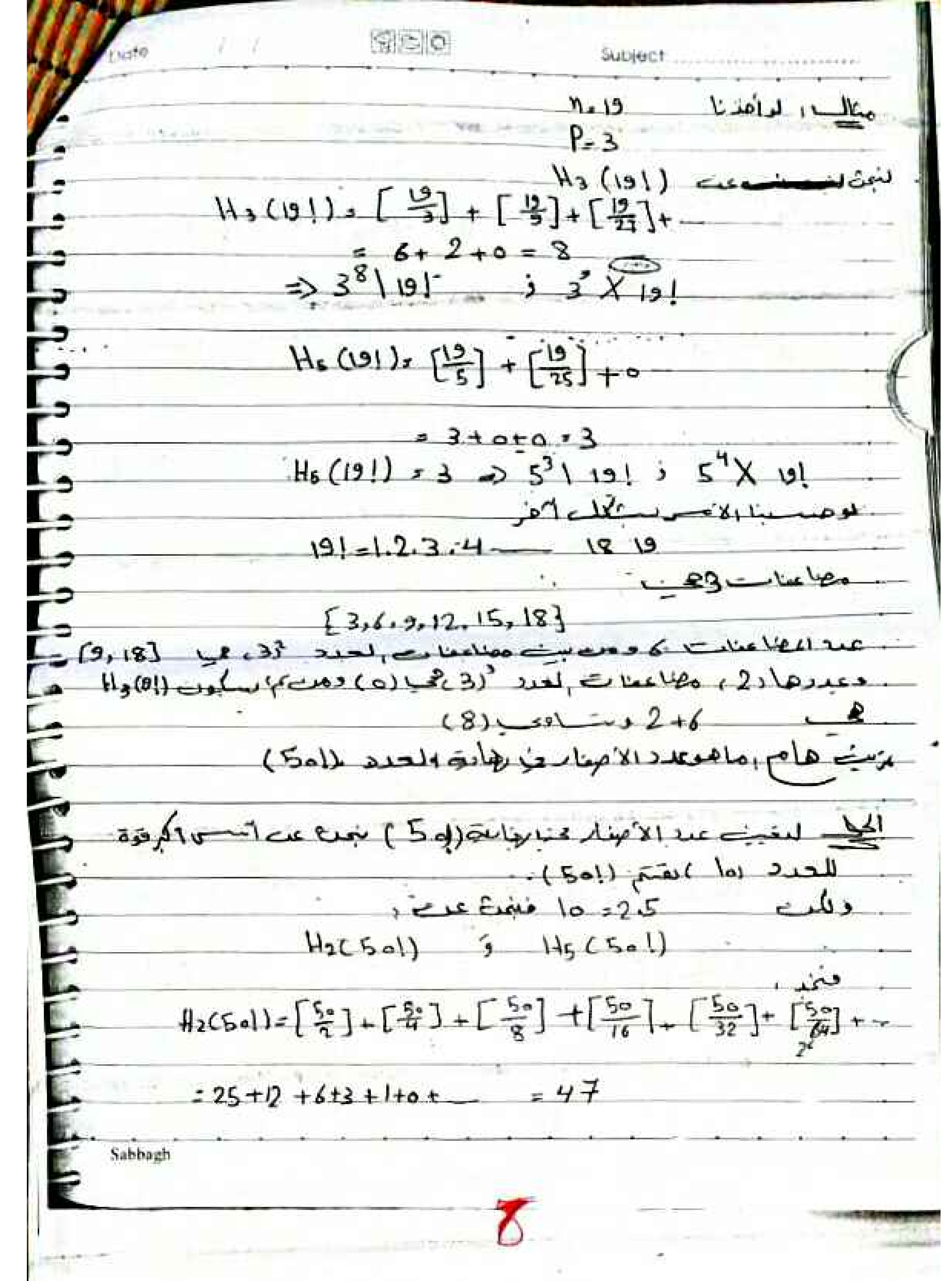
$$H_P(n!) = \left[\frac{n}{P}\right] + \left[\frac{n}{P^2}\right] + \left[\frac{n}{P^3}\right] + \cdots \left[\frac{n}{P^x}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{x} \left[\frac{n}{P^i}\right]$$

حيث $\left[\frac{n}{P^x}\right] \ge 1$

و $\left[\frac{n}{P^i}\right] = 0 \qquad i \ge x+1$

Sabbagh



Date / / Subject

مثال: لو أخذنا $n=19$

$P=3$

نبحث عن $H_3(19!)$

$$H_3(19!) = \left[\frac{19}{3}\right] + \left[\frac{19}{9}\right] + \left[\frac{19}{27}\right] + \dots$$

$$= 6 + 2 + 0 = 8$$

$$\Rightarrow 3^8 \mid 19! \; ; \; 3^9 \nmid 19!$$

$$H_5(19!) = \left[\frac{19}{5}\right] + \left[\frac{19}{25}\right] + 0$$

$$= 3 + 0 + 0 = 3$$

$$H_5(19!) = 3 \Rightarrow 5^3 \mid 19! \; ; \; 5^4 \nmid 19!$$

لو وضحنا الأمر بشكل أكبر

$19! = 1.2.3.4 \dots 18 \; 19$

مضاعفات 3 هي:

$\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

عدد المضاعفات 6 ومن بين مضاعفات العدد 3^2 هي $[9, 18]$ وعددها 2، مضاعفات العدد 3^3 هي (0) ومن ثم سيكون $H_3(19!)$ هي $2+6$ وتساوي (8)

تمرين هام: ما هو عدد الأصفار في نهاية العدد $(50!)$

الحل: لنعرف عدد الأصفار في نهاية $(50!)$ نبحث عن أس أكبر قوة للعدد 10 تقسم $(50!)$.

ولكن $10 = 2.5$ فنوجد عدد:

$H_2(50!)$ و $H_5(50!)$

فنجد:

$$H_2(50!) = \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right] + \left[\frac{50}{64}\right] + \dots$$

$$= 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + \dots = 47$$

Sabbagh

$2^{47} \mid 50!$; $2^{48} \nmid 50!$

$$H_5(50!) = \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{25}\right] + \left[\frac{50}{125}\right] + \cdots$$

$$= 10 + 2 = 12$$

أي أن $5^{12} \mid (50!)$; $5^{13} \nmid (50!)$

وبما أن $d(2,5)=1$ فيكون أس أكبر قوة للعدد (10) يقسم (50!) إنما

هو 12 ومنه عدد الأصفار في نهاية (50!) هو (12) صفر

<u>مبرهنة:</u>

إذا كتب العدد الصحيح (m) في النظام الأعدادي أساسه العدد الأولي p:

$$m = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_{r-1} p^{r-1} + a_r p^r$$

; $[a_i = 0, 1, \ldots, p-1]$

فإن أس أكبر قوة للعدد p يقسم (m!) تحسب بالعلاقة

$$H_p(m!) = \frac{m - \sum_{i=0}^{r} a_i}{p-1}$$

<u>مثال:</u> أثبت أن جداء أي n من الأعداد الصحيحة المتتالية الموجبة يقبل القسمة على (n!)

<u>الحل:</u>

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+n)}{n!}$$

$$= \frac{k!\,(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{k!\cdot n!} = \frac{(k+n)!}{k!\,n!}$$

$$= \frac{(k+n)!}{n!\,[k+n-n]!} \qquad \binom{k+n}{n} \in \mathbb{Z} \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

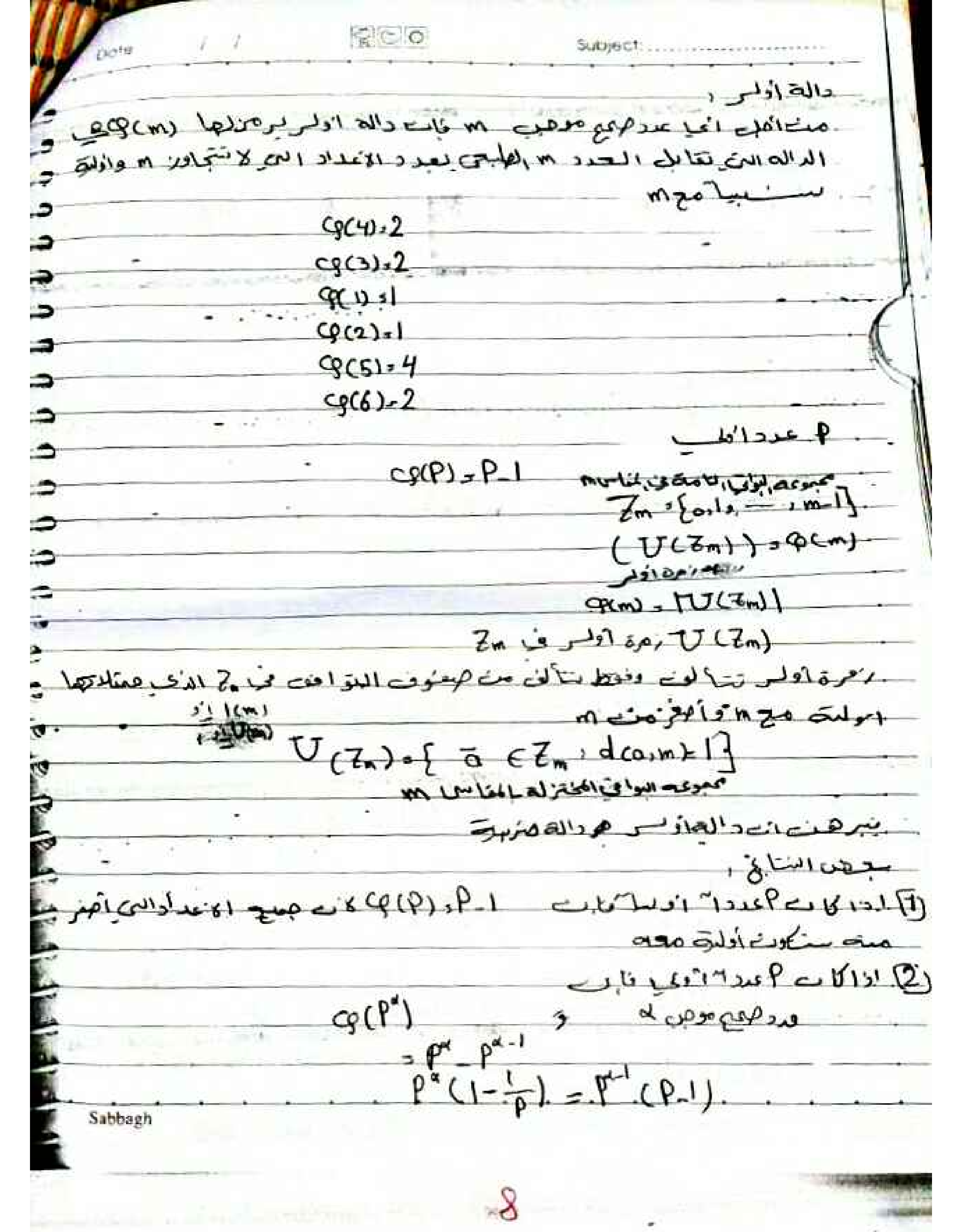
أي أن

$(k+1)(k+2)\cdots(k+n) = n! \cdot \binom{n+k}{n}$

أي أن

$(k+1)(k+2)\cdots(k+n)$

يقبل القسمة على $n!$.



Date / / Subject: ....

دالة أويلر :

من أجل أي عدد صحيح موجب m فإن دالة أويلر يرمز لها $\varphi(m)$ هي الدالة التي تقابل العدد m الطبيعي بعدد الأعداد التي لا تتجاوز m وأولية نسبياً مع m.

$\varphi(4)=2$

$\varphi(3)=2$

$\varphi(1)=1$

$\varphi(2)=1$

$\varphi(5)=4$

$\varphi(6)=2$

P عدد أولي

$\varphi(P)=P-1$

مجموعة البواقي التامة وفق المقياس m

$Z_m=\{0,1,2,\dots,m-1\}$

$(U(Z_m))=\varphi(m)$

زمرة أويلر

$\varphi(m)=|U(Z_m)|$

$U(Z_m)$ زمرة أويلر في Z_m

زمرة أويلر تتألف وفقط تتألف من صفوف البواقي في Z_m الذي ممثلاتها أولية مع m وأصغر من m

إذ (a,m)

$U(Z_m)=\{\bar{a}\in Z_m : d(a,m)=1\}$

مجموعة البواقي المختزلة للمقياس m

يبرهن أن دالة أويلر هي دالة ضربية

بحسب السابق :

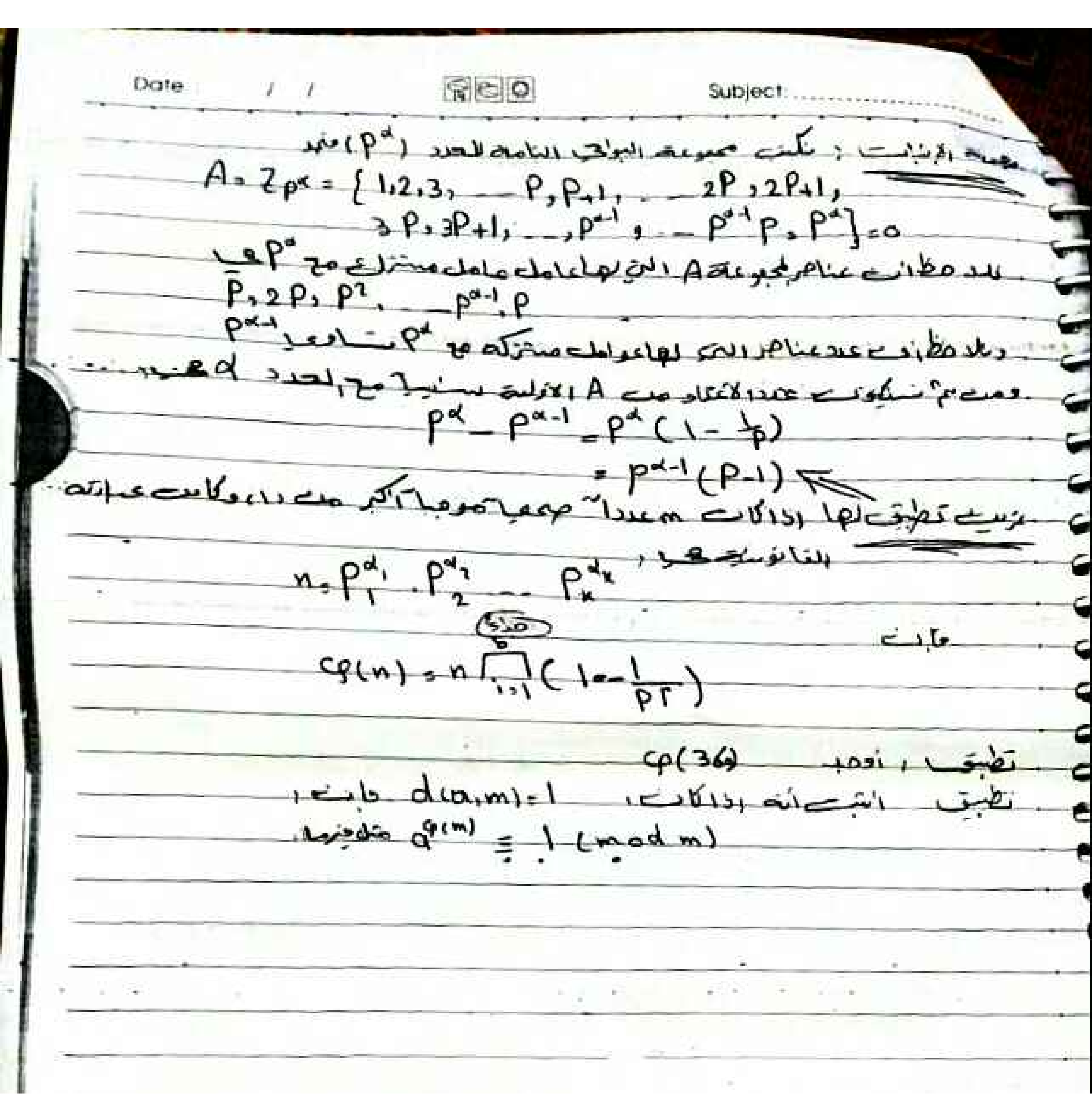
(1) إذا كان P عدداً أولياً فإن $\varphi(P)=P-1$ لأن جميع الأعداد التي أصغر منه ستكون أولية معه

(2) إذا كان P عدداً أولياً فإن $\varphi(P^\alpha)$ ؛ α عدد صحيح موجب

$=P^\alpha-P^{\alpha-1}$

$P^\alpha(1-\frac{1}{p})=P^{\alpha-1}(P-1)$.

Sabbagh



Date / / Subject: ....

صحة الإثبات: نكتب مجموعة البواقي التامة للعدد (p^α) فنجد

$$A = Z_{p^\alpha} = \{1,2,3,\dots,p,p+1,\dots,2p,2p+1,$$
$$3p,3p+1,\dots,p^{\alpha-1},\dots,p^{\alpha-1}p,p^\alpha\} = 0$$

نلاحظ أن عناصر المجموعة A التي لها عامل مشترك مع p^α هي
$p, 2p, p^2, \dots, p^{\alpha-1}\cdot p$

ونلاحظ أن عدد عناصر التي لها عوامل مشتركة مع p^α تساوي $p^{\alpha-1}$
ومن ثم سيكون عدد الأعداد من A الأولية نسبياً مع العدد p^α هو:

$$p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$$
$$= p^{\alpha-1}(p-1)$$

مبرهنة تطبيق لها: إذا كان m عدداً صحيحاً موجباً أكبر من (1) وكانت صيغته القانونية هي:

$$n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$$

فإن

هام

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

تطبيق: أوجد $\varphi(36)$

تطبيق: اثبت أنه إذا كان $d(a,m)=1$ فإن:
$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ مبرهنة